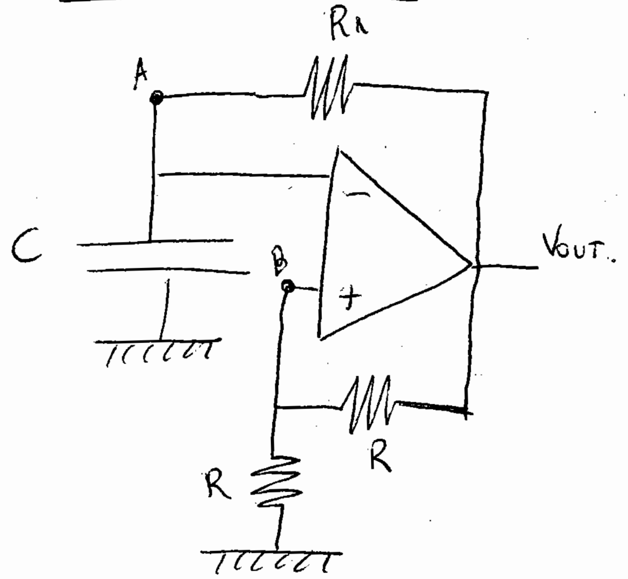
PABLO VILLACORTA IGLESIAS
1º B INGENIERÍA.

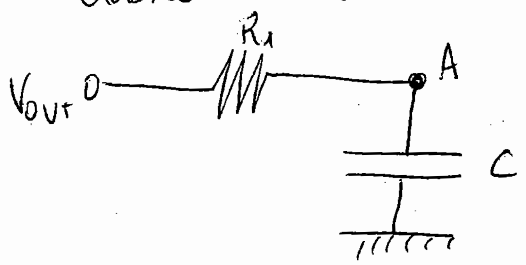
PRÁCTICA Nº 2



Tenemos que considerar que el amplificador operacional está funcionando en realimentación positiva. Debido a su inestabilidad, V_{OUT}, en principio, será, o bien $+V_{CC}$ (tensión de saturación del amplificador), o bien $-V_{CC}$.

Vamos a empezar suponiendo que $V_{OUT} = +V_{CC}$.

En la parte de arriba del circuito, si consideramos que I_{R_1} tiene sentido desde V_{OUT} al punto A, tenemos un clásico circuito RC:

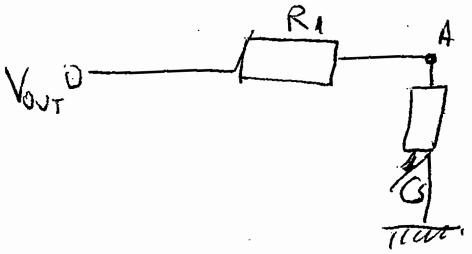


V_{OUT} es una señal constante en el tiempo (es decir, estamos en condiciones de corriente continua), así que por el condensador no debería circular corriente. Esto sería cierto a partir de haber transcurrido un cierto tiempo, para que el circuito se "estabilice", entendiendo esto como "que llegue al estado en que se mantendría funcionando si lo dejásemos un tiempo indefinido". En la práctica, ese tiempo es muy pequeño, pero en dicho intervalo, la "salida" de este circuito RC está cambiando (aumentando), por lo que la tensión que soporta el condensador va variando, y por él circula corriente, hasta que V_A llega al valor en que se mantendrá, permaneciendo desde entonces ya constante la tensión en el condensador, por el cual, a partir de este momento, no circulará corriente.

Para obtener la salida V_A de este circuito RC, aplicamos el método de la transformada de Laplace, considerando que la tensión que le entra, la V_{OUT} del circuito global, es a efectos del circuito RC, <u>una señal escalón, de amplitud V_{OUT}</u>:

Entrada del circuito RC $\equiv V_{OUT} \cdot u(t)$, para así poder obtener V_A, con su expresión exacta.

Pasamos el circuito al dominio de la transformada de Laplace:



Tenemos un divisor de tensión, donde $V_A(s) = V_{OUT}(s) \cdot \frac{1}{Cs} \cdot \frac{1}{R_1 + \frac{1}{Cs}}$

Como $V_{OUT}(s) = \mathcal{L}\{V_{OUT} \cdot u(t)\} = V_{OUT} \cdot \mathcal{L}\{u(t)\} = V_{OUT} \cdot \frac{1}{s}$

Así que $V_A(s) = \frac{V_{OUT}}{S} \cdot \frac{1}{\cancel{Cs}} \cdot \frac{1}{\frac{R_1Cs+1}{\cancel{Cs}}} = V_{OUT} \cdot \frac{1}{R_1Cs^2+S}$

Para obtener $V_A(t)$, hallamos $\mathcal{L}^{-1}\{V_A(s)\}$:

$$V_A(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V_A(s)\} = V_{OUT} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(R_1Cs+1)}\right\}$$

Tendremos que descomponer la fracción en fracciones simples:

$$\frac{1}{s(R_1Cs+1)} = \frac{A}{S} + \frac{B}{R_1Cs+1} = \frac{A(R_1Cs+1)+Bs}{s(R_1Cs+1)}$$, igualando numeradores:

$$1 = A(R_1Cs+1)+Bs \iff \left.\begin{matrix} A=1 \\ A \cdot R_1C + B = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{matrix} \boxed{A=1} \\ \boxed{B=-R_1C} \end{matrix}$$

luego

$$V_A(t) = V_{OUT} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{S} + \frac{-R_1C}{R_1Cs+1}\right\} = V_{OUT} \cdot \left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{S}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{R_1C}{R_1Cs+1}\right\}\right)$$

$$= V_{OUT} \cdot \left(u(t) - R_1C \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{R_1Cs+1}\right\}\right) =$$

$$= V_{OUT} \cdot \left(u(t) - R_1C \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{R_1C} \cdot \frac{1}{s+\frac{1}{R_1C}}\right\}\right) =$$

$$= V_{OUT} \cdot \left(u(t) - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1/R_1C}\right\}\right) = V_{OUT} \cdot \left(u(t) - e^{-\frac{1}{R_1C} \cdot t}\right),$$

pero como para $t \geq 0$, $u(t) = 1$, tenemos que

$$V_A(t) = V_{OUT}\left(1 - e^{-1/R_1C \cdot t}\right)$$

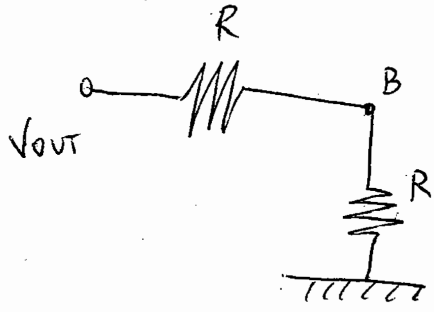
Como vemos, si dejáramos este circuito RC en esas condiciones un tiempo indefinido, ocurriría que:

$$\lim_{t\to\infty} V_A(t) = \lim_{t\to\infty} V_{OUT} \cdot \left(1 - e^{-t/RC}\right) = \lim_{t\to\infty} V_{OUT} \cdot \left(1 - \frac{1}{e^{t/RC}}\right) =$$

$= V_{OUT} \cdot (1-0) = V_{OUT}$, porque cuando $V_A(t)$ llega a su valor ~~estable~~ definitivo, deja de circular corriente por el condensador, lo cual deja la rama de R_1 en circuito abierto (no circula corriente por R_1), y por eso $V_A = V_{OUT}$.

Pero, si volvemos a considerar nuestro circuito, esto nunca llega a ocurrir, por el siguiente motivo:

En la parte inferior del circuito, tenemos un divisor de tensión, teniendo en cuenta que I_R circula desde V_{OUT} hacia el punto B:



y así $V_B = V_{OUT} \cdot R \cdot \frac{1}{R+R} =$

$= V_{OUT} \cdot \frac{\cancel{R}}{2\cancel{R}} \longrightarrow V_B = \frac{V_{OUT}}{2}$.

No hay que olvidar que $V_A = V^-$ (tensión en el pin − del amplificador), y $V_B = V^+$ (tensión en el pin +). En principio, los pines se distribuyen como hemos dibujado, pero, debido al aumento de tensión que se produce en el punto A (y que es el causante de que el condensador, que estaba descargado, se vaya cargando), llega un momento en el que V^- iguala a

V^+, e incluso la supera debido a ciertos fenómenos de ruido.

Si el condensador se cargase totalmente, al final $V_A = V_{OUT}$ como vimos al hacer el límite. Pero nunca llega a cargarse, porque cuando alcanza una carga tal que $V_A = \frac{V_{CC}}{2}$, al tener el punto A un potencial que ha igualado e incluso superado ligeramente el de V_B, ocurre que el pin superior pasa a ser el pin +, y el inferior, el pin −.

De este modo, el condensador está cargado justo hasta la mitad.

Entonces, el cambio de los pines provoca que V_{OUT} pase repentinamente a valer $-V_{CC}$. El proceso que tiene lugar ahora es el contrario:

- En el circuito RC de arriba, el condensador, que se había cargado hasta la mitad, soportaba una tensión $V_{CC}/2$ (la placa inferior está conectada a "masa", pero la superior no). Si consideramos que la entrada para este hipotético circuito RC es una señal escalón de amplitud $-V_{CC}$ para $t \geq 0$, la tensión en el punto A, tras dejar el circuito RC funcionando un tiempo indefinido, sería $-V_{CC}$, pero hasta que alcanza ese valor, pasa un cierto tiempo, durante el cual V_A va disminuyendo desde $+V_{CC}/2$ que había.

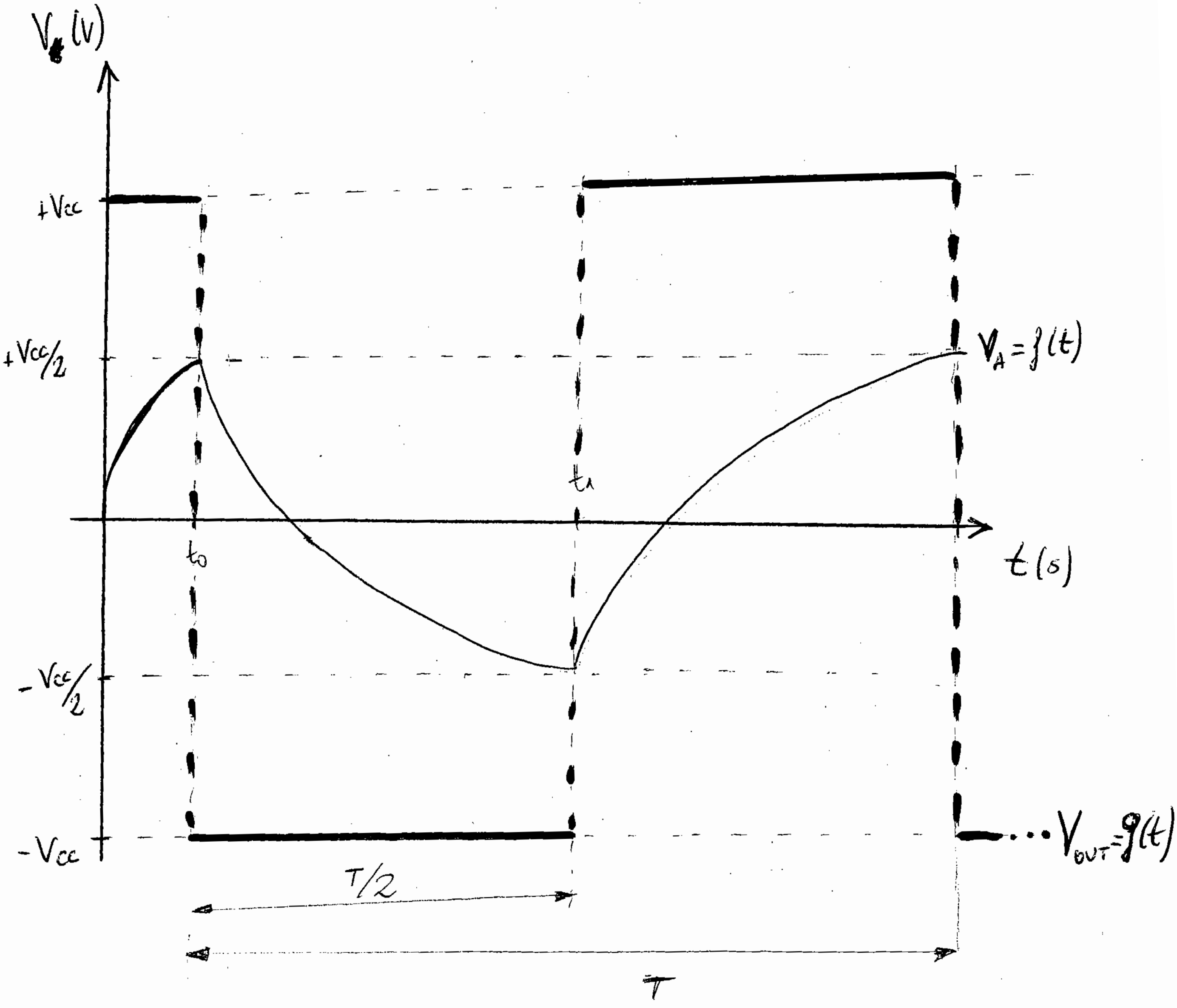
De esta forma, el condensador se va descargando, al ser la carga proporcional a la tensión que soportan sus láminas. Realmente, cuando V_A sigue disminuyendo y alcanza valores negativos, el condensador empieza a cargarse de nuevo, pero esta vez "en sentido contrario al de antes", es decir, la lámina que antes tenía carga positiva se cargará ahora negativamente, y la que poseía carga negativa, se cargará positivamente. Y pasa igual que antes: esta carga tampoco llega a completarse, se queda justo en la mitad, porque V_A no llega a ser ~~[illegible]~~ nunca igual a $-V_{CC}$: cuando $V_A = -V_{CC}/2$, vuelve a cambiar la distribución de los pines.

- Esto se debe a que, en el <u>divisor de tensión</u> que tenemos abajo, cuando V_{OUT} pasó a ser $-V_{CC}$, la tensión V_B pasó a valer $-V_{CC}/2$. Como ahora, $V_B = V^-$ (el pin negativo es ahora el inferior), cuando en el pin superior la tensión V^+ se hace un poco menor que V^-, vuelve a cambiar la distribución de los pines (en este caso volvería a ser la del principio).

Nótese que en este proceso, el condensador, que estaba cargado hasta la mitad, se descarga completamente, y se vuelve a cargar, ahora "en sentido contrario" (explicado arriba), también hasta la mitad.

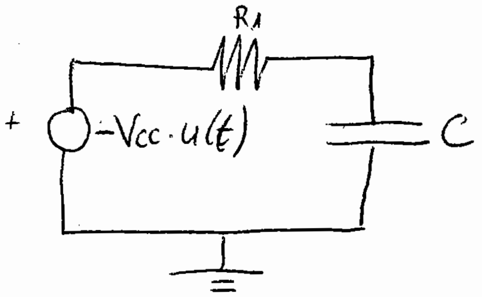
~~Por tanto, el ha transcurrido T/2 (descarga desde la mitad de su carga) y otros~~

Podemos resumir el proceso en el siguiente gráfico, que muestra la variación de la tensión en el punto A ("salida" del circuito RC), que equivale a la tensión entre las placas del condensador, a lo largo del tiempo:

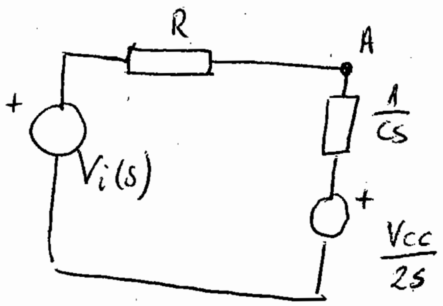


Resta ahora calcular el periodo T de la señal cuadrada que obtenemos en la salida del amplificador. Como se aprecia, es el doble del tiempo que tarda el condensador en cargarse de $V_{cc}/2$ a $-V_{cc}/2$ (mejor dicho, el que transcurre desde que entre sus placas hay $+V_{cc}/2$ hasta que hay $-V_{cc}/2$).

Este tiempo se puede calcular de la función de salida del circuito R_1C. Si lo aislamos, tenemos:



donde las condiciones iniciales no son nulas, porque entre las láminas del condensador existe una tensión inicial $+V_{cc}/2$. Esto hay que tenerlo en cuenta al pasar el circuito al dominio de la transformada de Laplace:



donde $V_i(s) = \mathcal{L}\{-V_{cc}\cdot u(t)\} =$

$= -V_{cc}\cdot\mathcal{L}\{u(t)\} = -\frac{V_{cc}}{s}$.

Lo resolvemos por superposición:

1). Si actúa sólo la fuente de valor $\frac{-V_{cc}}{s}$:

Tenemos un divisor de tensión en el que

$$V_{A_1}(s) = V_i(s)\cdot\frac{1}{Cs}\cdot\frac{1}{R_1+\frac{1}{Cs}} = \frac{-V_{cc}}{s}\cdot\frac{1}{\cancel{Cs}}\cdot\frac{\cancel{Cs}}{R_1Cs+1} =$$

$$= \boxed{\frac{-V_{cc}}{s\cdot(R_1Cs+1)} = V_A(s)}$$

Para obtener $V_A(t)$ hallamos su transformada inversa, descomponiendo para ello a $V_A(s)$ en fracciones simples:

$$\frac{-V_{cc}}{s\cdot(R_1Cs+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{R_1Cs+1} = \frac{A(R_1Cs+1)+Bs}{s(R_1Cs+1)}$$ lo cual ocurre si:

$$A R_1 C + B = 0 \rightarrow B = -A R_1 C = \boxed{V_{cc} \cdot R_1 \cdot C = B}$$

$$A = -V_{cc} \rightarrow \boxed{A = -V_{cc}}$$

así que tenemos que:

$$V_A(s) = \frac{-V_{cc}}{s\,(R_1 C s + 1)} = \frac{-V_{cc}}{s} + \frac{V_{cc} \cdot R_1 \cdot C}{R_1 C s + 1}$$ y así

$$V_A(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V_A(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-V_{cc}}{s} + \frac{V_{cc} \cdot R_1 \cdot C}{R_1 C s + 1}\right\} =$$

$$= -V_{cc}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + V_{cc} \cdot R_1 \cdot C \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{R_1 C s + 1}\right\} =$$

$$= -V_{cc} \cdot u(t) + V_{cc} \cdot R_1 \cdot C \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(\frac{\cancel{R_1 C} s}{\cancel{R_1 C}} + \frac{1}{R_1 \cdot C}\right) \cdot (R_1 \cdot C)}\right\} =$$

$$= -V_{cc} \cdot u(t) + \frac{V_{cc} \cdot \cancel{R_1} \cdot \cancel{C}}{\cancel{R_1} \cdot \cancel{C}} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s - \left(-\frac{1}{R_1 \cdot C}\right)}\right\} =$$

$$= -V_{cc} \cdot u(t) + V_{cc} \cdot e^{-t/R_1 C}$$ Pero para $t \geq 0$, $u(t) = 1$ así que

$$\boxed{V_{A_1}(t) = -V_{cc}\left(1 - e^{-t/R_1 C}\right)}$$, primer resultado parcial de superposición.

2) Si actúa sólo la fuente de valor $+\frac{V_{cc}}{2s}$:

Tenemos otro divisor de tensión, donde

$$V_{A_2}(s) = V_i(s) \cdot R_1 \cdot \frac{1}{R_1 + \frac{1}{Cs}}$$ con $V_i(s) = \frac{V_{cc}}{2s}$, así que

$$V_{A_2}(s) = \frac{V_{cc}}{2\cancel{s}} \cdot R_1 \frac{C\cancel{s}}{R_1 C s + 1} = \frac{C \cdot R_1 \cdot V_{cc}}{(R_1 C s + 1) \cdot 2} = V_{A_2}(s).$$

Esta vez no necesitamos descomponer en fracciones simples:

$$V_{A_2}(s) = \frac{C \cdot R_1 \cdot V_{CC}}{2} \cdot \frac{1}{R_1 C s + 1} \; ; \quad V_{A_2}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{V_{A_2}(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{R_1 \cdot V_{CC} C}{2} \cdot \frac{1}{R_1 C s + 1}\right\}$$

$$= \frac{C \cdot R_1 \cdot V_{CC}}{2} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(\frac{\cancel{R_1 C} s}{\cancel{R_1 C}} + \frac{1}{R_1 \cdot C}\right)(R_1 \cdot C)}\right\} =$$

$$= \frac{\cancel{C R_1} \cdot V_{CC}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{R_1 \cdot C}} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s - \left(-\frac{1}{R_1 \cdot C}\right)}\right\} = \boxed{\frac{V_{CC}}{2} \cdot e^{-t/R_1 C} = V_{A_2}(t)}$$

Segundo resultado parcial de superposición.

Y por el principio de superposición,

$$V_A(t) = V_{A_1}(t) + V_{A_2}(t) = \boxed{-V_{CC}\left(1 - e^{-t/R_1 C}\right) + \frac{V_{CC}}{2} \cdot e^{-t/R_1 C} = V_A(t)}$$

Si observamos la gráfica, lo que hemos obtenido es la ecuación del segundo tramo, pero suponiéndolo comenzando en el 0 (eje Y), es decir, que si evaluamos $V_A(t)\Big|_{t=0}$, obtendremos $+V_{CC}/2$, porque hemos supuesto que las condiciones iniciales <u>no</u> eran nulas (en el instante inicial $_{(t=0)}$ V_A era $+\frac{V_{CC}}{2}$, como se obtiene también de esta ecuación).

Ahora queremos obtener un instante, t_1, en el que siguiendo esta ecuación, la tensión en el punto A es $-V_{CC}/2$.

Como el tiempo se mide fijando, como hemos dicho, como "instante inicial" el momento en que V_A era $\frac{V_{CC}}{2}$, el t_1 calculado será directamente $T/2$, es decir, la mitad del periodo de la onda cuadrada que en el circuito original se corresponde con la salida.

Así que:

$$V_A(t_1) = -\frac{V_{cc}}{2}; \quad -V_{cc}\left(1-e^{\frac{-t_1}{R_1C}}\right)+\frac{V_{cc}}{2}\cdot e^{\frac{-t_1}{R_1C}} = -\frac{V_{cc}}{2};$$

sacamos factor común: $\cancel{-V_{cc}}\left(1-e^{\frac{-t_1}{R_1C}}-\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{-t_1}{R_1C}}\right) = \frac{\cancel{-V_{cc}}}{2};$

$$1-e^{\frac{-t_1}{R_1\cdot C}}-\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{-t_1}{R_1\cdot C}} = \frac{1}{2}; \quad -\frac{3}{2}\cdot e^{\frac{-t_1}{R_1\cdot C}} = -\frac{1}{2};$$

$$e^{\frac{-t_1}{R_1\cdot C}} = \frac{-1\cdot\cancel{2}}{-3\cdot\cancel{2}};$$ para despejar t_1 tomamos logaritmos:

$$L\, e^{\frac{-t_1}{R_1\cdot C}} = L\left(\frac{1}{3}\right); \quad \frac{-t_1}{R_1\cdot C} = L\left(\frac{1}{3}\right);$$

$$-t_1 = R_1\cdot C\cdot\left(\cancelto{0}{L(1)}-L(3)\right); \quad t_1 = -R_1\cdot C\cdot(-L(3)) \rightarrow \boxed{t_1 = L(3)\cdot R_1 C}$$

Y finalmente $T = 2\,T/2 = 2\,L(3)\,R_1C$

$T/2$ (nueva carga, hasta la mitad), es decir, el tiempo que transcurre entre cada cambio en la configuracion del amplificador es justamente $T/2 + T/2 = T$ (tiempo que tarda el condensador en cargarse).